Tentamen Fouriertheorie
23/01/08, 9.00 – 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 9 vraagstukken. Elk vraagstuk is 10 punten waard. Bij deelvragen staat het aantal punten tussen rechte haken. Het cijfer wordt berekend volgens

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{10}.$$

1. Hoe worden de ruimtes $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ en $L^2[-\pi,\pi]$ gedefinieerd? Wat is precies het verschil tussen deze twee ruimtes?

2. De rij van functies $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f_n(x) = \cos(x)^n.$$

   (a) [4] Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor bijna alle $x \in [0, 2\pi]$.

   (b) [6] Formuleer de gedomineerde convergentiestelling en gebruik deze stelling om aan te tonen dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 0.$$

3. Geef een voorbeeld van een niet-lege verzameling van maat nul.

4. Geef een voorbeeld van een Banachruimte. Noem daarbij ook de bijbehorende norm.

5. Formuleer de stelling van Dirichlet over convergentie van Fourierreeksen.

6. De 2π-periodieke functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) [6] Laat zien dat de Fourierreeks van f wordt gegeven door

$$R(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1-4n^2} \sin(nx).$$

   Aanwijzing: gebruik de gelijkheden

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \end{aligned}$$

   (b) [4] Voor welke $x \in [-\pi, \pi]$ geldt dat $f(x) = R(x)$?

Zie ommezijde!

7. De 2π-periodieke functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) [6] Laat zien dat de Fourierreeks van f wordt gegeven door

$$R(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$

   (b) [3] Voor welke $x \in [-\pi, \pi]$ geldt dat $f(x) = R(x)$?

   (c) [1] Toon aan dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8. Voor $a > 0$ definieren we de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{als } x \geq 0 \end{cases}.$$

   Laat zien dat de Fouriergetransformeerde wordt gegeven door

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{a + 2\pi i y}.$$

9. Gegeven is de functie $f(x) = xe^{-\pi x^2}$. Laat zien dat de Fouriergetransformeerde wordt gegeven door $\widehat{f}(y) = -iye^{-\pi y^2}$.
   Aanwijzing: gebruik partiële integratie en het feit dat de Fouriergetransformeerde van $g(x) = e^{-\pi x^2}$ wordt gegeven door $\widehat{g}(y) = e^{-\pi y^2}$.